МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО

7 класс. Комбинаторика–2. 06 июня 2010 года

1. Можно ли покрасить клетки таблицы 8×8 в 16 цветов так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону?

2. В магазине стоят двое двухчашечных весов: одни всегда показывают правильный результат, а другие всегда показывают неправильный результат. У продавца есть 1000 монет, среди которых есть фальшивые и настоящие. Все настоящие монеты весят поровну.
а) Известно, что все фальшивые монеты весят поровну и отличаются по весу от настоящих. Весы определяют, на какой чашке вес больше. Как определить, какие из весов показывают правильный результат?
б) Известно, что есть хотя бы две настоящие монеты, про фальшивые монеты не известно ничего. В этом пункте весы определяют лишь равны ли монеты по весу. Как определить, какие из весов показывают правильный результат?

3. На столе лежат а) 2001 карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 2001$; б) 2002 карточки с числами $1, 2, 3, \ldots, 2002$.
Двое играющих берут по одной карточке по очереди. После того, как будут взяты все карточки, выигравшим считается тот, у кого больше последняя цифра суммы чисел на взятых карточках. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Клетки квадрата 100×100 раскрашены в черный и белый цвета так, что в любом прямоугольнике 1×5 одно и то же количество черных клеток. Кроме того, в любом квадрате 3×3 также одно и то же количество черных клеток. Докажите, что все клетки квадрата 100×100 — одного цвета.

5. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

6. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 261 камень, в другой — 259 камней, а в третьей — 215 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить несколько кучек по одному камню в каждой?

7. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!”. Вторая сваха говорит: “А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!”. Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: “В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!”. Прав ли он?